

임의 대형구조 전자기 해석을 위한 CBFM의 빠른 원거리 상호 작용 계산 알고리즘

A Fast Computation Method of Far Field Interactions in CBFM for Electromagnetic Analysis of Large Structures

박찬선 · 홍익표* · 권오범** · 김윤재** · 육종관

Chan-Sun Park · Ic-Pyo Hong* · Obum Kwon** · Yoon-Jae Kim** · Jong-Gwan Yook

요 약

본 논문에서는 임의의 대형구조의 전자기 특성을 효율적으로 해석하기 위해 대표적인 전자기 수치해석 기법의 하나인 모멘트법 기반 직접풀이법 중 CBFM의 원거리 상호작용 계산의 가속화 알고리즘을 제안하였다. 대형구조의 전자기 특성해석을 위해서는 계산시간의 단축이 필수적이며, CBFM 해석법에서 원거리 블록 간의 상호작용을 다중극 전개방법을 사용한 근사화를 통해 복잡도를 크게 감소시킨 수식을 도출하였다. 본 논문에서 제안된 새로운 알고리즘을 도체구와 전투기의 레이더 단면적 계산에 적용하여 기존의 CBFM과 비교하여 정확도 손실 없이 계산시간이 각각 34 %, 74 % 단축되어 대형구조 문제해석에 효율적이라는 것을 확인하였다.

Abstract

The characteristic basis function method, or CBFM, is one of the representative electromagnetic methods widely used today. In this paper, we propose an accelerating algorithm for the far field interaction calculation of CBFM, to efficiently analyze the electromagnetic characteristics of arbitrarily large structures. To effectively analyze the electromagnetic characteristics of a large structure, it is essential to shorten the computation time. In the CBFM analysis method, the complexity can be greatly reduced by using approximations created via the multipole expansion method. The new algorithm proposed in this paper is applied to the computation of radar cross sections of conductor spheres and fighter aircraft, and it is confirmed that calculation time is reduced by 34 % and 74 %, respectively, without loss of accuracy compared with existing CBFM.

Key words: MoM, CBFM, Direct Method, Multipole Expansion, Monostatic RCS

I. 서 론

Method of Moment(MoM) 기법^[1]은 맥스웰 방정식으로

부터 유도한 적분 방정식 기반의 선형 시스템을 행렬 방정식으로 변환하여 계산하는 전자기 수치해석 기법이다.

「이 연구는 국방과학연구소의 연구비 지원으로 수행되었음.」

연세대학교 전기전자공학부(Department of Electric and Electronic Engineering, Yonsei University)

*공주대학교 정보통신공학부(Department of Information & Communication Engineering, Kongju National University)

**국방과학연구소(Agency for Defense Development)

· Manuscript received June 7, 2018 ; Revised August 13, 2018 ; Accepted August 28, 2018. (ID No. 20180607-063)

· Corresponding Author: Jong-Gwan Yook (e-mail: jgyook@yonsei.ac.kr)

전통적인 방식의 MoM은 해석에 필요한 시간과 계산 자원이 각각 $O(N^3)$, $O(N^2)$ 의 복잡도를 가져 전기적으로 큰 문제해석이 효율적이지 않다는 단점을 갖고 있다.

이러한 단점을 극복하기 위하여 Conjugate Gradient, GMRES 등 반복풀이법(iterative solver)을 알고리즘 내부에 적용한 다양한 수치적기법과 알고리즘 등 여러 가지 기법들이 개발되었다. 이후 반복풀이법을 사용하는 기법들은 여러 개선 과정들을 거쳐 Fast Multipole Method(FMM)^[2], Multilevel Fast Multipole Method(MLFMM)^[3], Adaptive Integral Method(AIM)^[4] 등의 정제된 알고리즘으로써 정착되어 사용되고 있다.

한편 최근 들어 앞서 언급한 선형 행렬 방정식을 직접 풀이법(direct solver)을 통하여 계산하는 알고리즘들 또한 개발되어 왔다. 대표적으로 Characteristic Basis Function Method(CBFM)^[5]이 이에 해당한다. CBFM은 문제의 각 부영역(subdomain)들에 대하여 새로운 Macro Basis Function인 Characteristic Basis(CB)를 정의하여 문제의 자유도(degrees of freedom: DoFs)를 줄이는 방법이다. 반복풀이법을 사용하는 기법과 가장 뚜렷하게 구별되는 직접풀이법 기반 알고리즘의 장점은 불분명한 수렴성으로부터 자유롭다는 점과 모노스태틱 레이다 단면적(monostatic radar cross-section) 계산과 같이 다수의 입사원을 포함하는 문제를 효과적으로 계산할 수 있다는 점이다.

CBFM은 CB 생성과정, 축소행렬(reduced matrix) 생성과정, 행렬 방정식 계산 과정의 3가지 과정으로 이루어지는데, 본 논문에서는 이 중 두 번째 과정을 다중극 근사화(multipole approximation)를 사용하여 가속화 하여 전체 계산시간을 단축하는 기법을 제안하였다.

II. CBFM Formulation

2-1 통상적인 MoM 구성

전통적인 MoM은 다음과 같은 행렬 방정식을 형성한다.

$$\overline{\overline{Z}} \overline{I} = \overline{V} \quad (1)$$

여기서 Z , I , V 는 각각 임피던스 행렬(impedance matrix), 전류(current), 입사신호원(incident source)를 나타내며, 수식상 다음과 같이 표현된다.

$$Z_{ij} = \int \vec{f}_i \cdot L(\vec{f}_j) dS \quad (2)$$

$$V_i = \int \vec{E}_{inc} \cdot \vec{f}_i dS \quad (3)$$

Z 는 시험함수(test function)와 기저함수(basis function) 사이의 상호작용으로, V 는 입사파(incident field)와 시험함수로 계산할 수 있다.

2-2 통상적인 CBFM 구성

CBFM은 앞서 설명한 바와 같이 세 가지 과정으로 나누어 연산을 수행한다. 첫 번째 과정인 CB 생성과정은 문제를 적절한 크기의 블록(block)이라 불리는 부영역으로 분리하는 것부터 시작한다. 상황에 따라 다르지만 보통 $0.5 \sim 2 \lambda$ 에 해당하는 크기의 큐브 형태로 나눈다. 이후 각 부영역별로 다양한 각도의 평면파를 입사시켜 형성되는 전류 분포들의 집합을 구하고, 이들을 특이값 분해(singular value decomposition: SVD)를 통하여 불필요한 전류분포들의 그룹을 제거하면 해당 부영역에 해당하는 CB 집합을 얻을 수 있다. CB 집합을 형성하는데 필요한 평면파의 수는 부영역의 크기에 따라 달라지는데, 이는 부영역의 크기에 따라 필요한 대역폭이 달라지기 때문이며, 경험적으로 0.5λ 의 블록에는 약 800개 정도의 서로 다른 입사각(θ , ϕ) 및 편파를 갖는 평면파가 적당하다. 형성된 CB는 다음과 같이 RWG(Rao-Wilson-Glisson) 기저함수의 선형합으로 표현된다.

$$\overline{CB} = \sum_i \alpha_i \vec{f}_i \quad (4)$$

이후 축소행렬을 형성하는 과정을 수행하는데, 일반적인 임피던스행렬을 형성하는 것과 같이 시험함수와 기저함수와의 상호작용을 계산하는 과정은 동일하지만 각 함수들이 RWG에서 CB로 변환된다.

$$\begin{aligned} Z_{mn}^r &= \int \overline{CB}_m \cdot L(\overline{CB}_n) dS \\ &= \int \sum_i \alpha_i^m \vec{f}_i \cdot L(\sum_j \alpha_j^n \vec{f}_j) dS \\ &= \sum_i \alpha_i^m \sum_j \alpha_j^n \int \vec{f}_i \cdot L(\vec{f}_j) dS \\ &= \sum_i \alpha_i^m \sum_j \alpha_j^n Z_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

수식을 정리하면 위와 같이 MoM의 임피던스행렬과 각 CB의 전류계수들로 표현할 수 있는데, 각 CB의 전류계수를 벡터 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$Z_{mn}^r = \overline{\alpha_m} \cdot \overline{Z}^{sub} \cdot \overline{\alpha_n} \quad (6)$$

마찬가지 방식으로 축소 인가벡터(reduced excitation vector) V^r 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} V_m^r &= \int \sum_i \alpha_i^m \vec{f}_i \cdot E_i^{inc} dS \\ &= \sum_i \alpha_i^m \int \vec{f}_i \cdot E_i^{inc} dS \\ &= \sum_i \alpha_i^m V_i = \overline{\alpha_m} \cdot \overline{V}^{sub} \end{aligned} \quad (7)$$

마지막 과정인 행렬 방정식을 계산하는 것은 MoM의 직접풀이법을 통한 계산과 동일하게 수행된다.

2.3 먼 블록간 가속된 상호작용 계산

전통적인 MoM에서는 전체 계산시간 중 임피던스행렬을 형성하는데 필요한 계산시간에 비하여 행렬 방정식을 계산하는데 필요한 시간이 월등히 많은 비중을 차지하므로 이를 가속화하는 연구들이 많이 진행되어왔다. 이와는 다르게 CBFM의 경우, 두 번째 과정인 축소행렬 생성과정 또한 행렬식을 계산하는 시간 못지않게 많은 시간이 필요하다.

이에 해당 과정을 Adaptive cross approximation(ACA)^[6]를 이용하여 가속화하는 연구들이 진행되었다. 해당 연구는 인접하지 않은 블록 간의 상호작용을 계산할 때 블록간 임피던스행렬을 계산한 뒤 해당 행렬이 낮은 랭크(rank)를 갖는 특성을 이용하여 ACA를 적용하고, 이를 통하여 계산량을 낮추는 기법이다. 해당 기법은 커널에 독립적(kernel-independent)이며, 비교적 구현이 쉽지만 행렬 생성과정 중 마찬가지로 큰 비중을 차지하는 ACA로 가속되는 축소행렬과는 별개로 MoM 행렬 생성을 온전히 전부 수행해야 한다는 한계점이 있다.

본 논문에서는 MoM 행렬 생성없이 자유공간 그린 함수(Green's function)의 다중극 전개방법(multipole expansion)을 이용하여 바로 축소행렬을 생성할 수 있는 기법을 제안한다. 널리 알려져 있는 고속 다중극 기법(fast multipole

method: FMM)에서 사용하는 그린함수의 다중극 전개식을 사용한 근사 식은 다음과 같다.

$$\frac{e^{-jk|\vec{R}+\vec{x}|}}{4\pi|\vec{R}+\vec{x}|} = \int_1 e^{-jk|\hat{k} \cdot \vec{x}|} T_L(k, \hat{k}, \vec{R}) dS_0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &T_L(k, \hat{k}, \vec{R}) \\ &= \frac{k}{(4\pi)^2} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(kR) P_l(\hat{k} \cdot \hat{R}) \end{aligned} \quad (9)$$

위 식에서 $h_l^{(2)}(x)$ 와 $P_l(x)$ 는 각각 제2종 구형 헨켈 함수와 차수 1의 르장드르 다항식을 나타낸다. 해당 수식은 실제 FMM에서 사용하는 수학적 의미와 동일하게 사용되므로 일반적인 FMM에서 가장 효율적이면서도 정확도를 잃지 않는 다중극 한도인 $L = kd + \beta(kd)^{1/3}$ 를 사용하였다. 여기서 d 는 블록의 크기를 의미한다. 추가적으로 L 에 따른 정밀도에 관한 연구는 다음^[7]을 참고할 수 있다. 이를 이용하여 기존의 임피던스 행렬을 표현하면

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= \int \vec{f}_i \cdot L(\vec{f}_j) dS \\ &= \int_1 R(\vec{f}_i, \hat{k}) \cdot T_L(k, \hat{k}, \vec{r}_{ab}) T(\vec{f}_j, \hat{k}) dS \end{aligned} \quad (10)$$

$$R(\vec{f}_i, \hat{k}) = j\omega\mu \int \vec{f}_i e^{-jk\hat{k} \cdot \vec{r}_{ra}} dr \quad (11)$$

$$T(\vec{f}_j, \hat{k}) = [1 - \hat{k}\hat{k}] \cdot \int \vec{f}_j e^{jk\hat{k} \cdot \vec{r}_{ra}} dr' \quad (12)$$

위와 같고, 이를 식 (5)에 적용하면

$$\begin{aligned} Z_{mn}^r &= \sum_i \alpha_i^m \sum_j \alpha_j^n \int_1 R(\vec{f}_i, \hat{k}) \\ &\quad \cdot T_L(k, \hat{k}, \vec{r}_{ab}) T(\vec{f}_j, \hat{k}) dS \\ &= \int_1 \left\{ \sum_i \alpha_i^m R(\vec{f}_i, \hat{k}) \right\} \\ &\quad \cdot T_L(k, \hat{k}, \vec{r}_{ab}) \left\{ \sum_j \alpha_j^n T(\vec{f}_j, \hat{k}) \right\} dS \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)과 같이 정리되어 블록 간 전달함수(transfer function) T_L 와 각 기저에 대응되는 방사함수(radiation function)와 수신함수(receive function) R, T 만 계산되면 실제

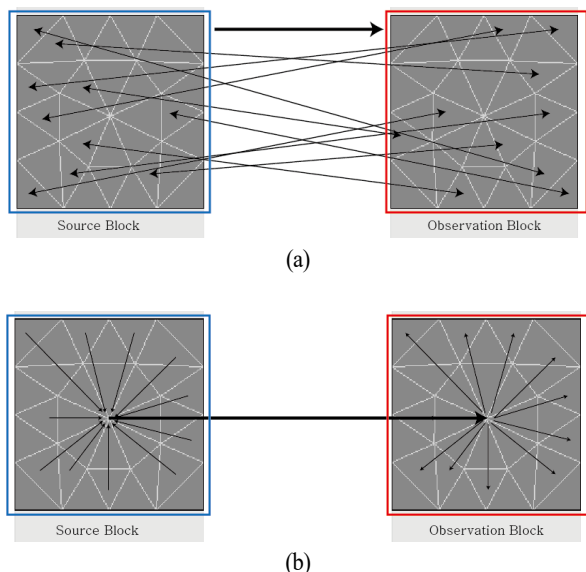


그림 1. (a) 통상 CBFM의 interaction 계산 방식, (b) 제안 알고리즘의 interaction 계산 방식

Fig. 1. (a) Conventional CBFM interaction calculation method, (b) Proposed interaction calculation method.

원거리 블록간 축소행렬 계산에 걸리는 시간을 줄이게 되어 해석속도를 가속할 수 있게 된다. 그림 1로 기존의 CBFM과 제안된 알고리즘의 알고리즘 차이를 표현하였다.

III. 수치해석 결과

제안된 알고리즘의 성능을 확인하기 위하여 두 가지 예제를 일반 CBFM과 제안 알고리즘, MIE 시리즈 및 상용전자기해석 소프트웨어인 FEKO를 이용하여 해석을 진행하였다. 해석에 사용된 모델은 RWG 기저함수를 사용하는 모델로 Xeon E5-1660 @ 3.3 GHz(단일코어 사용)을 사용하여 시뮬레이션을 진행하였다.

첫 번째 예제는 반지름이 2λ 인 구의 바이스테틱(bistatic) RCS 해석이다. 해당 예제는 약 30,000개의 RWG 기저로 이루어져 있다. 해석 블록의 크기는 CBFM과 제안 알고리즘 모두 1λ 로 설정하여 해석을 진행하였으며, 해석 결과와 해석에 소요된 시간은 표 1에 나타내었다.

기존의 30,000개의 미지(unknown)수는 3,400개의 CB로 감소하였고 그림 2에서 확인할 수 있듯이 CBFM의 결과와 제안된 알고리즘의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있었

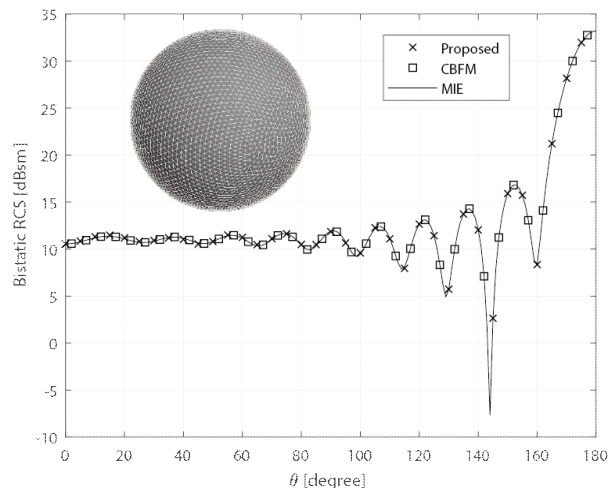


그림 2. 구의 바이스테틱 RCS

Fig. 2. Bistatic RCS of sphere.

표 1. 구의 해석 시간

Table 1. Computational times for analysis of the sphere.

	CBFM	Proposed
CB generation	278 s	278 s
Multipole setup	-	1,002 s
Matrix filling	3,710 s	1,359 s
Solving time	15 s	15 s
Total time	4,078 s	2,693 s

다. RCS의 평균 오차는 약 0.5 %이며, 계산시간 또한 4,078 초에서 2,693초로 크게 개선된 것을 확인할 수 있었다.

임의의 구조에 적용되었을 때의 성능을 살펴보기 위하여 전투기 모델을 두 번째 예제 모델로 설정하고 해석을 진행하였다. 해당 모델은 RWG 기저 기준으로 약 10만 개의 기저로 이루어져 있다. 본 예제에서는 직접폴리법의 장점 중 하나인 다중 여기(multiple excitation)를 검증하기 위하여 θ 에 대하여 모노스테틱 RCS 해석을 진행하고, 그 결과를 분석하였다.

생성된 CB의 개수는 10,280개로 앞서와 마찬가지로 약 1/10 정도의 압축률(compression rate)을 보였으며, FEKO 시뮬레이션 결과와의 평균 RCS 차이는 6.5 %로 크지 않은 것을 확인할 수 있다. 각 알고리즘의 계산시간 또한 70,180 초에서 18,549초로, 74 %만큼 계산시간이 단축되는 것을

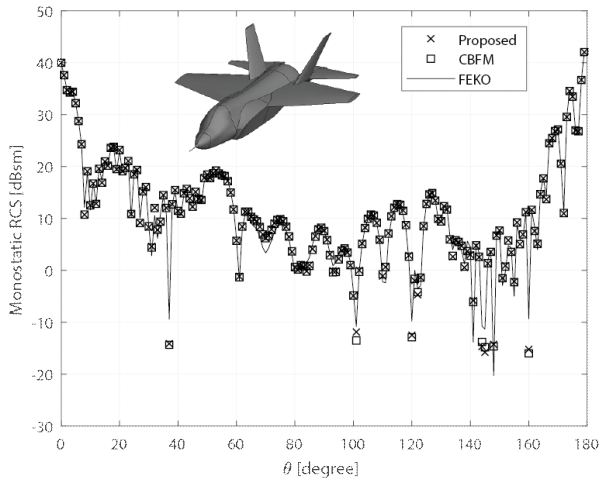


그림 3. 전투기의 모노스테틱 RCS
Fig. 3. Monostatic RCS of aircraft.

표 2. 전투기 모델의 해석 시간
Table 2. Computational times for analysis of the aircraft.

	CBFM	Proposed	Single excitation
CB generation	1,159 s	1,159 s	-
Multipole setup	-	4,480 s	-
Matrix filling	68,035 s	12,659 s	-
Solving time	658 s	658 s	664 s
Total time	70,180 s	18,549 s	-

*4,000s per excitation using FEKO.

확인하였다. 추가로 단일 여기일 때와 비교하여 해석시간이 거의 차이 나지 않는 것을 확인할 수 있는데, 이는 다중 여기문제의 효율적 해석 측면에서 의미 있는 결과임을 보여준다.

IV. 결 론

본 논문은 다중극 전개방법을 활용하여 개선된 CBFM 알고리즘을 제안하여 대형구조 전자기 해석을 가속화하는 기법을 제안하였으며, 예제를 통하여 정확도 손실 없이 $4\lambda \times 4\lambda \times 4\lambda$, $16\lambda \times 10\lambda \times 3.5\lambda$ 크기의 대형구조 해석에 대하여 계산 속도가 51 %, 278 % 향상되는 것을 확인하였다. 본 기법은 비록 통상적인 CBFM과 비교하였을 때 다중극

전개방법에 관한 이론이 추가되어 알고리즘 구현이 복잡해지지만 모노스테틱 RCS 해석과 같은 다중여기 문제처럼 반복법으로는 효율적으로 해석하지 못하는 문제에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

References

- [1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, MacMillan, 1968.
- [2] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 35, no. 3, pp. 7-12, Jun. 1993.
- [3] J. M. Song, C. C. Lu, and W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 10, pp. 1488-1493, Oct. 1997.
- [4] E. Bleszynski, M. Bleszynski, and T. Jaroszewicz, "AIM: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems," *Radio Science*, vol. 31, no. 5, pp. 1225-1251, Sep.-Oct. 1996.
- [5] V. Prakash, R. Mittra, "Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equation," *Microwave Optical Technology Letters*, vol. 36, no. 2, pp. 95-100, Jan. 2003.
- [6] R. Maaskant, R. Mittra, and A. Tjhuis, "Fast analysis of large antenna arrays using the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 11, pp. 3440-3451, Nov. 2008.
- [7] J. M. Song, W. C. Chew, "Error analysis for the truncation of multipole expansion of vector Green's function," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 1999 Digest. Held in Conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting*, Orlando, FL, 1999, vol. 1, pp. 628-631.

박 찬 선 (연세대학교/석박사 통합과정)



2012년 2월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학사)
2012년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 석박사 통합과정
[주 관심분야] 전자기 수치해석

김 윤 재 (국방과학연구소/선임연구원)



2005 8월: 서울대학교 기계항공공학부(공학석사)
2011 8월: 서울대학교 기계항공공학부(공학박사)
2011년 9월~2012년 3월: 서울대학교 정밀기계공동연구소 선임연구원
2012 4월~현재: 국방과학연구소 7본부 3

부 선임연구원

[주 관심분야] 기체구조, 진동소음, 주기격자 구조

홍 익 표 (공주대학교/교수)



1994년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)
1996년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)
2000년 2월: 연세대학교 전기컴퓨터공학과 (공학박사)
2000년 3월~2003년 2월: 삼성전자 정보

통신총괄 책임연구원

2006년 2월~2007년 2월: Texas A&M University, Visiting Scholar

2012년 2월~2013년 2월: Syracuse University, Visiting Scholar

2003년 3월~현재: 공주대학교 정보통신공학부 교수

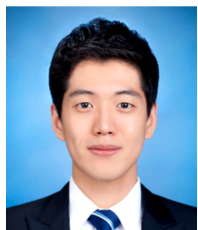
[주 관심분야] 전자기 수치해석, EMI/EMC, 안테나

육 중 관 (연세대학교/교수)



2000년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 교수
2012년~2013년: IEEE Distinguished Lecturer (EMC Society)
[주 관심분야] 수치해석, 마이크로파 구조 해석 및 설계, EMI/EMC, HEMP, RF 바이오/가스센서 등

권 오 범 (국방과학연구소/연구원)



2015 2월: 울산과학기술원(UNIST) 기계 및 원자력공학부 (공학사)
2017 2월: 울산과학기술원(UNIST) 기계 및 원자력공학부 (공학석사)
2017 2월~현재: 국방과학연구소 7본부 3부 연구원
[주 관심분야] 복합소재, 주기격자 구조