

## 클러터 환경에서의 GLRT 기반 표적 탐지성능

# Target Detection Performance in a Clutter Environment Based on the Generalized Likelihood Ratio Test

서진배 · 전주환 · 정지현\* · 김진욱\*

Jin-Bae Suh · Joo-Hwan Chun · Ji-Hyun Jung\* · Jin-Uk Kim\*

### 요 약

본 논문에서는 일반화우도비검정(generalized likelihood ratio test: GLRT)에 있는 모르는 파라미터(표적의 크기, 클러터의 파라미터)를 최대우도추정(maximum likelihood estimation: MLE) 방법 또는 Newton-Raphson method를 통해 추정하는 방법에 대해서 제안하였다. 클러터 환경에서 표적을 탐지할 경우, 실제 환경과 유사하게 클러터의 수식적인 모델을 세우는 것이 중요하다. 이러한 서로 상관된 클러터 모델은 SIRV(Spherically Invariant Random Vector)를 이용하여 생성할 수 있다. 생성된 클러터 모델에 대한 일반화우도비검정 식을 세우고, 추정된 파라미터에 대한 일반화우도비검정의 탐지확률을 모의실험을 통해 확인하였다.

### Abstract

We propose a method to estimate unknown parameters(e.g., target amplitude and clutter parameters) in the generalized likelihood ratio test(GLRT) using maximum likelihood estimation and the Newton-Raphson method. When detecting targets in a clutter environment, it is important to establish a modular model of clutter similar to the actual environment. These correlated clutter models can be generated using spherically invariant random vectors. We obtain the GLRT of the generated clutter model and check its detection probability using estimated parameters.

Key words: Clutter, Generalized Likelihood Ratio Test, Detection Probability

## I. 서 론

레이다에서 물체에 맞고 들어온 신호를 처리하여 해당 위치에 표적이 있는지 없는지를 판단한다. 여기서, 레이다에서 쏜 신호가 표적 이외의 다른 물체(땅, 바다 등)에 맞고 들어오는 신호를 클러터라 한다. 이러한 클러터 환경에서 표적을 탐지하는 다양한 알고리즘이 존재한다<sup>[1]~[4]</sup>. 현실 상황에서는 클러터의 확률분포가 가우시안을 따르

지 않고, 클러터의 포락선 분포가 레일리 분포를 따르지 않는다. 따라서 클러터의 포락선(envelope)이 표적의 신호와 비슷한 신호를 가지는 경우 단순히 포락선으로만 표적을 탐지하는 알고리즘을 이용해서 표적을 찾기가 힘들다. 또한 코히어런트 펄스 간격에 있는 클러터들은 서로 독립적이지 않고 상관관계가 있다. 따라서 클러터 신호 때문에 원하는 표적을 탐지하기가 어렵고, 클러터의 수식적인 모델을 세우는 것이 필요하다.

한국과학기술원 전기 및 전자공학부(School of Electronic Engineering, KAIST)

\*한화시스템(Hanwha System)

· Manuscript received November 27, 2018 ; Revised January 10, 2019 ; Accepted April 26, 2019. (ID No. 20181127-120)

· Corresponding Author: Jin-Bae Suh (e-mail: sjb6697@kaist.ac.kr)

레이다에서 코히어런트 펄스 간격에 해당하는  $N$ 개의 펄스를 한꺼번에 처리한다. 따라서 클러터 모델은  $N$ 차원의 결합확률분포가 필요하고, 이러한 서로 연관된  $N$ 차원 클러터의 모델은 SIRV(Spherically Invariant Random Vector)를 이용하여 구할 수 있다<sup>[5]</sup>. SIRV로 생성한 클러터는 기저 대역 IQ 채널의 복소 벡터로 표현된다. 또한 클러터의 포락선은 웨이블분포(Weibull distribution) 또는 케이분포(K distribution)를 따른다. 이러한 분포를 따르는 클러터는 스파이크 신호가 존재한다.

실제 클러터 환경에서 표적을 찾을 때 일반화우도비검정(generalized likelihood ratio test: GLRT)을 통해 표적이 있고 없음을 판단할 수 있다<sup>[6],[7]</sup>. 일반화우도비검정 식은 신호가 있을 경우의 확률분포와 신호가 없고 클러터만 존재할 경우에 대한 확률분포의 비율에 대한 식을 세울 수 있다. 식에서 모르는 파라미터를 최대우도추정 방법 또는 Newton-Raphson method를 이용하여 추정할 수 있다. 파라미터를 추정하고 난 후, 추정치에 대한 일반화우도비검정 값이 특정 역치보다 큰 값인지 작은 값인지를 구분하여 신호가 있는지를 판단할 수 있다. 모의실험을 통해 해당 일반화우도비검정의 성능을 신호 대 클러터 비(signal to clutter ratio: SCR)에 따른 탐지확률로 확인할 수 있다.

## II. 클러터 환경에서의 레이더 탐지

### 2-1 클러터 모델

클러터는 서로 상관된 복합 가우시안 모델이다. SIRV를 이용하여 생성한  $N \times 1$  복소 형태의 기저대역 클러터는 식 (1)과 같다.

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_I + j\mathbf{c}_Q \quad (1)$$

클러터는  $\mathbf{c} = S\mathbf{z}$  로도 표현된다. 여기서  $S$ 는 확률 분포  $f_S(s)$ 를 따르는 음이 아닌 확률변수이고,  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_I + j\mathbf{z}_Q$ 인 복소 가우시안 랜덤 벡터를 의미한다. 그리고  $\mathbf{z}$ 와  $S$ 는 서로 확률적 독립 관계이다.

클러터의 확률분포는 식 (2)와 같이 표현된다.

$$f_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = \frac{1}{\pi^N |\Sigma|} h_N \left( (\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (2)$$

여기서  $\boldsymbol{\mu}$ 는 클러터의 평균 벡터(크기:  $N \times 1$ ),  $\Sigma = E[(\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})^H]$ 는 클러터의 공분산 행렬(크기:  $N \times N$ ),  $h_N(\cdot)$ 은 일차 음이 아닌 실수 값의 단조 감수 함수를 의미한다.  $(\cdot)^H$ 는 켈레전치이다. 그리고  $h_N(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$h_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{-2N} \exp\left(-\frac{x}{2s^2}\right) f_S(s) ds \quad (3)$$

여기서  $f_S(s)$ 는 클러터의 포락선 확률분포로 결정된다. 대표적인 클러터 포락선 확률분포는 웨이블분포, 케이분포가 있다.

웨이블분포는 식 (4)로 표현된다.

$$f_R(r) = abr^{b-1} \exp(-ar^b) u(r) \quad (4)$$

여기서  $a$ 는 크기 파라미터,  $b$ 는 모양 파라미터이다. 그리고  $u(\cdot)$ 는 단위 계단 함수이다.

케이분포는 식 (5)로 정의된다.

$$f_R(r) = \frac{2b}{\Gamma(a)} \left(\frac{br}{2}\right)^a K_{a-1}(br) u(r) \quad (5)$$

여기서  $a$ 는 크기 파라미터,  $b$ 는 모양 파라미터,  $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수,  $K_\nu(\cdot)$  제 2종 변형 베셀 함수이다.

### 2-2 일반화우도비검정

클러터가 있는 환경에서 레이더를 사용하여 신호가 있고 없음을 판단하기 위해서 일반화우도비검정으로 판단할 수 있다. 두 개의 가정을 통해 일반화우도비검정 식을 세울 수 있다.

$$\begin{cases} H_1: & \mathbf{z} = \alpha \mathbf{u} + \mathbf{c} \\ H_0: & \mathbf{z} = \mathbf{c} \end{cases} \quad (6)$$

식 (6)에서  $\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{c}$ 는 각각 기저대역의 수신 신호, 송신 신호, 클러터를 의미한다. 여기서 클러터의 평균은  $\mathbf{0}$ 이고, 송신 신호는 알고 있다고 가정한다. 위의 식에서  $H_1$ 일 때는 크기  $\alpha$ 를 가진 표적 신호  $\mathbf{u}$ 가 들어올 때를 의미하고,  $H_0$ 은 단지 클러터만 들어오는 상황을 의미한다.

가정  $H_1$  일 때의 확률분포의 식 (7)은

$$f(\mathbf{z}|H_1) = \frac{1}{\pi^N |\Sigma|} h_N \left( (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u}) \right) \quad (7)$$

이고, 가정  $H_0$  일 때의 확률분포의 식 (8)은

$$f(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\pi^N |\Sigma|} h_N \left( \mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z} \right) \quad (8)$$

이다.

$H_0$ ,  $H_1$  가정에서의 확률분포의 비율을 이용하여 일반화우도비검정 식을 세우고, 이를 통해 표적을 탐지할 수 있다. 따라서 일반화우도비검정은 식 (9)로 표현된다.

$$\Lambda(z) = \frac{h_N \left( (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u}) \right)}{h_N \left( \mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z} \right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T \quad (9)$$

여기서  $T$ 는 역치를 의미한다. 레이다에서 측정치를 받았을 경우, 일반우도비검정의 값이 특정 역치를 넘는다면 신호가 있다고 판단하고, 반대로 역치를 넘지 않는다면 신호가 없고 오로지 클러스터만 있다고 판단한다.

식 (9)에서 신호의 크기  $\alpha$ , 클러스터 파라미터  $a, b$ 에 대한 정보가 없기 때문에 받은 측정치를 이용하여 이를 추정한다. 따라서 식 (10)으로 표현할 수 있다.

$$\Lambda(z) = \frac{\max_{\alpha, a, b} h_N \left( (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{z} - \alpha \mathbf{u}) \right)}{\max_{a, b} h_N \left( \mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z} \right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T \quad (10)$$

먼저, 신호의 크기  $\alpha$ 에 대해서 일반우도비검정 식이 최대가 되는 값을 최대우도추정 방법으로 구한다. 추정된  $\alpha$ 는 식 (11)로 표현한다.

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u}} \quad (11)$$

$\hat{\alpha}$ 를 식 (10)에 대입하여 정리하면, 식 (12)로 표현된다.

$$\Lambda(z) = \frac{\max_{a, b} h_N \left( \mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z} - \frac{|\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u}|^2}{\mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u}} \right)}{\max_{a, b} h_N \left( \mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z} \right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T \quad (12)$$

다음으로 일반화우도비검정 식의 분모, 분자에 있는 크기 파라미터  $a$ 와 모양 파라미터  $b$ 는 레이다에서 받은 수신 측정치를 이용하여 Newton-Raphson method으로 추정할 수 있다.

Newton-Raphson method는 식 (13)으로 표현된다.

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_c - H(\mathbf{x}_c)^{-1} J(\mathbf{x}_c) \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{x} = [a, b]^T$ 이고,  $\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_n$ 은 현재 상태, 다음 상태의 파라미터를 의미한다. 또한  $J(\cdot)$ 는 야코비 벡터,  $H(\cdot)$ 는 헤세 행렬이다.

야코비 벡터는 파라미터  $a, b$ 에 대해서 함수  $h_N(\cdot)$ 을 한 번 미분하여 식 (14)와 같이 구할 수 있다. 또한, 헤세 행렬은 야코비 벡터를 파라미터  $a, b$ 에 대해서 미분해서 식 (15)와 같이 구한다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_N(\cdot)}{\partial a} \\ \frac{\partial h_N(\cdot)}{\partial b} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial a \partial a} & \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial b \partial b} \end{bmatrix} \quad (15)$$

웨이블분포, 케이분포의 야코비 벡터와 헤세 행렬에서의 각 항에 해당하는 값은 부록에 있다.

### III. 모의실험

Newton-Raphson method를 통해 구한 클러스터 파라미터의 추정 성능을 측정치 샘플 개수에 따라 확인하였다.

그림 1과 그림 2는 크기 파라미터  $a$ 와 모양 파라미터  $b$ 를 추정한 결과를 표현하였다. 모의실험 파라미터는 크기 파라미터  $a = 0.4$ , 모양 파라미터  $b = 1.2$ , 펄스 개수  $N = 2$ 인 웨이블분포에 대해서 수행하였다. 또한 레이다 수신 측정치는 클러스터만 존재하는 경우에 대한 클러스터 파라미터를 추정하였다.

그림 1과 그림 2에서 측정치 샘플의 개수가 많아질수록 평균제곱 오차가 식 (16)의 Cramer-Rao bound와 비슷해지는 것을 확인할 수 있다.

$$CRB = - \begin{bmatrix} E \left( \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial a \partial a} \right) & E \left( \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial a \partial b} \right) \\ E \left( \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial b \partial a} \right) & E \left( \frac{\partial^2 h_N(\cdot)}{\partial b \partial b} \right) \end{bmatrix}^{-1} \quad (16)$$

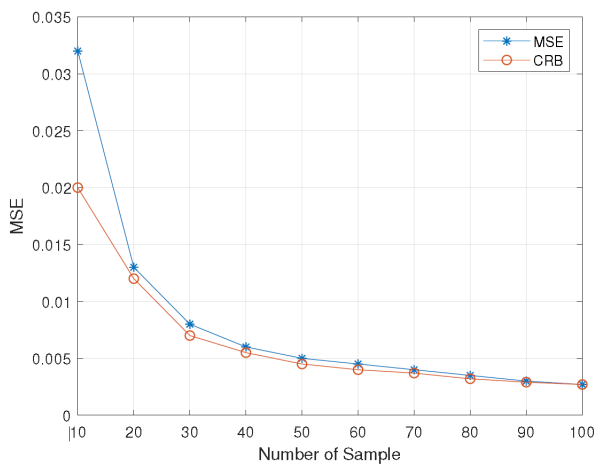


그림 1. 크기 파라미터  $a$ 의 평균제곱 오차  
Fig. 1. Mean square error of parameter  $a$ .

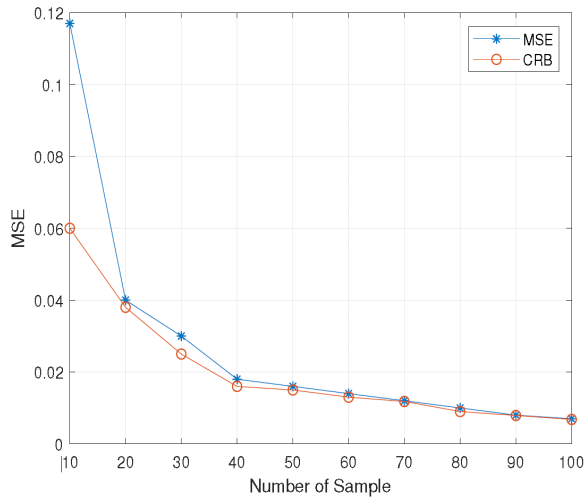


그림 2. 모양 파라미터  $b$ 의 평균제곱 오차  
Fig. 2. Mean square error of parameter  $b$ .

그림 3과 그림 4의 모의실험에서 사용한 파라미터는 크기 파라미터  $a=0.4$ , 모양 파라미터  $b=1.2$  이고, 측정치의 샘플 개수는 100개, 각 탐지확률은 SCR마다 몬테카를로 수행을 10,000번하여 구하였다. 그리고 오경보 확률은  $1e-5$  이다.

그리고 각 그래프의 초록 선은 참 파라미터  $a, b$ 에 대한 탐지확률, 빨강 선은 추정된  $a, b$ 에 대한 탐지확률, 파랑 선은 파라미터를 고려하지 않았을 때의 탐지확률을 나타냈다<sup>[5]</sup>. 참고문헌 [5]에서는 일반화우도검정 식 (10)

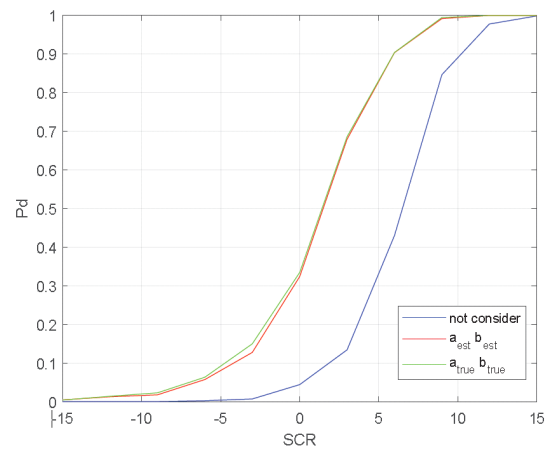


그림 3. 웨이블분포에서의 탐지확률  
Fig. 3. Detection probability in Weibull distribution.

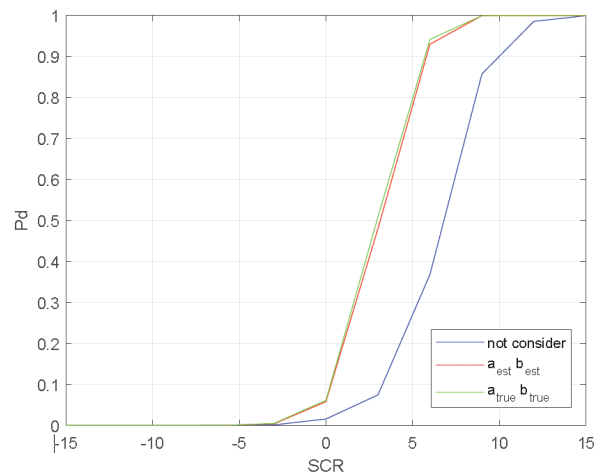


그림 4. 케이분포에서의 탐지확률  
Fig. 4. Detection probability in K distribution.

의 클러스터 크기 파라미터, 모양 파라미터를 추정하지 않고, 식의 근사를 통해 식 (17)로 정리할 수 있다. 식 (17)에서는 클러스터의 확률분포와 상관없이 일반화우도검정 식으로 표현된다.

$$\frac{|\mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}|^2}{(\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z})(\mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u})} \quad (17)$$

웨이블분포일 때의 탐지확률은 식 (18)과 같이 표현된다.

$$P_d^{Weibull} = \int_T \frac{\sum_{k=1}^N \{C_k a^k z_1^{kb} \exp(-a(\sigma z_1)^b)\}}{\sum_{k=1}^N \{C_k a^k z_0^{kb} \exp(-a(\sigma z_0)^b)\}} dz \quad (18)$$

케이분포의 탐지 확률은 식 (18)로 표현된다.

$$P_d^K = \int_T \left( \frac{z_1}{z_0} \right) \frac{K_{N-a}(bz_1)}{K_{N-a}(bz_0)} dz \quad (19)$$

여기서  $z_1 = (\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z})$ ,  $z_0 = (\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{z}) - \frac{|\mathbf{z}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u}|^2}{(\mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u})}$

$$C_k = \sum_{m=1}^k (-1)^{m+N} 2^N \frac{\sigma^{kb}}{k!} \binom{k}{m} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{mb}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)} \text{이다.}$$

신호 대 클러스터 비는

$$SCR = |\alpha|^2 \mathbf{u}^H \Sigma^{-1} \mathbf{u} \quad (20)$$

이고, 여기서  $|\alpha|^2$ 는 신호 전력을 의미한다. 웨이블 분포와 케이 분포일 경우에 신호 비 클러스터 전력이 증가할수록 탐지 확률도 증가한다.

웨이블 분포와 케이 분포를 따르는 클러스터 환경에서 일반우도화검정 식을 통해 레이다 수신 측정치의 신호의 유무를 판단한다. 클러스터 파라미터(크기 파라미터, 모양 파라미터)를 Newton-Raphson method로 추정한 일반우도화검정 식의 탐지확률은 실제 크기 파라미터와 모양 파라미터에 대한 일반우도화검정 식의 탐지확률과 거의 비

슷한 것을 확인할 수 있다. 이는 파라미터를 고려하지 않은 일반우도화검정 식의 탐지확률<sup>[5]</sup>보다 훨씬 높은 탐지확률을 가진다. 따라서 수신 레이다 측정치를 Newton-Raphson method를 사용하여 모르는 클러스터 파라미터  $a$ ,  $b$ 를 고려하여 일반우도화검정 식을 세워서 높은 탐지확률로 신호의 유무를 판단할 수 있다.

#### IV. 결 과

본 논문에서는 Newton-Raphson method를 통해 추정한 클러스터 파라미터를 이용하여 일반우도비검정 식을 세웠다. 그리고 제안된 방법으로 추정한 파라미터를 이용한 일반우도비검정의 탐지확률과 클러스터 파라미터를 추정하지 않았을 때의 일반우도비검정 탐지확률을 비교하였다. 모의실험 결과에서 제안된 방법을 통해 추정한 클러스터 파라미터를 이용하여 구한 탐지확률은 파라미터를 추정하지 않았을 때의 탐지확률보다 훨씬 높은 탐지확률을 가지는 것을 확인하였다. 따라서 클러스터의 파라미터를 추정한 일반우도비검정 식을 이용하여 신호의 유무를 판단할 경우, 높은 확률로 신호를 탐지할 수 있다.

#### References

- [1] P. L. Shui, M. Liu, and S. W. Xu, "Shape-parameter-dependent coherent radar target detection in K-distributed clutter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 52, no. 1, pp. 451-465, Feb. 2016.
- [2] G. Ghobadizadeh, S. Gazor, M. Naderpour, and A. A. Tadaion, "Asymptotically optimal CFAR detectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 4, pp. 897-909, Feb. 2016.
- [3] 송승언, 김봉석, 김상동, 김민수, 김운섭, 이종훈, "FOD 탐지 FMCW 레이다에서 지면 클러스터 모델링 및 탐지 성능에 대한 영향 분석," 한국시물레이션학회논문지, 27(4), pp. 61-68, 2018년 12월.
- [4] B. Liu, B. Chen, and J. H. Michels, "A GLRT for multichannel radar detection in the presence of both compound Gaussian clutter and additive white Gaussian noise," *Digital Signal Processing*, vol. 15, no. 5, pp. 437-454,

Sep. 2005.

- [5] M. Rangaswamy, D. D. Weiner, and A. Ozturk, "Non-Gaussian random vector identification using spherically invariant random processes," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 1, pp. 111-124, Jan 1993.
- [6] E. Conte, M. Lops, and G. Ricci, "Asymptotically optimum radar detection in compound-Gaussian clutter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 617-625, Apr. 1995.
- [7] X. Shuai, L. Kong, and J. Yang, "Performance analysis of GLRT-based adaptive detector for distributed targets in compound-Gaussian clutter," *Signal Processing*, vol. 90, no. 1, pp. 16-23, Jan. 2010.

부 록

부록에서는 식 (14), 식 (15)에서 표현된 야코비 벡터와 헤세 행렬의 해당하는 요소들을 웨이블분포, 케이분포일 때 각각 구하였다.

1. 웨이블분포의  $h_N(x)$  미분

$$h_N(x|a,b) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k C_{km} a^k \tag{21}$$

식 (20)에서  $C_{km} = (-1)^{m+N} \frac{2^N}{k!} \binom{k}{m} (\sigma x)^{kb} x^{-2N} \exp(-a(\sigma x)^b)$

$\Gamma\left(1 + \frac{mb}{2}\right) / \Gamma\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)$ ,  $N$ 은 펄스 개수,  $\sigma$ 은 분산  $a$ 는 크기 파라미터,  $b$ 는 모양 파라미터이다.

$$\frac{\partial h_N(x|a,b)}{\partial a} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k C_{km} (ka^{k-1} - a^k (\sigma x)^b) \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_N(x|a,b)}{\partial b} &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k C_{km} a^k \{k \log(\sigma x) \\ &+ \left(\frac{m}{2} \left(\psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)\right)\right) \\ &- a(\sigma x)^b \log(\sigma x)\} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial a \partial a} &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k \{C_{km} (k(k-1)a^{k-2} \\ &- 2k(\sigma x)^b a^{k-1} + (\sigma x)^{2b} a^k)\} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial b \partial b} &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k k \log(\sigma x) AB \\ &+ \frac{m}{2} \left(\psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)\right) AB + \\ &\left(\frac{m}{2}\right)^2 \left(\psi^{(1)}\left(1 + \frac{mb}{2}\right) - \psi^{(1)}\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)\right) A \\ &- a(\sigma x)^b \log(\sigma x) AB - a(\sigma x)^b \log^2(\sigma x) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial a \partial b} &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^k C_{km} \left\{ \log(\sigma x) (k^2 a^{k-1} - k(\sigma x)^b a^k) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{m}{2} \left(\psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)\right)\right) (ka^{k-1} - (\sigma x)^b a^k) \right. \\ &+ \left. \left(-a(\sigma x)^b \log(\sigma x) (ka^{k-1} - (\sigma x)^b a^k) - a^k (\sigma x)^b \log(\sigma x)\right) \right\} \end{aligned} \tag{26}$$

식 (23)에서  $\psi^{(0)}(x) = \frac{d\Gamma(x)}{dx}$  이다.

식 (25)에서  $A = \frac{\partial h_N(x|a,b)}{\partial b}$ ,  $B = \left(k \log(\sigma x) + \frac{m}{2} \left(\psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2}\right) - \psi^{(0)}\left(1 + \frac{mb}{2} - N\right)\right) - a(\sigma x)^b \log(\sigma x)\right)$ ,

$\psi^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \psi^{(0)}(x)$  이다.

2. 케이분포의  $h_N(x)$  미분

$$h_N(x|a,b) = \frac{b^{2N}}{\Gamma(a)} \frac{(bx)^{a-N}}{2^{a-1}} K_{N-a}(bx) \tag{27}$$

식 (27)에서  $N$ 은 펄스 개수,  $a$ 는 크기 파라미터,  $b$ 는 모양 파라미터이다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_N(x|a,b)}{\partial a} &= C \{ \log(bx) K_{N-a}(bx) - \log(2) K_{N-a}(bx) \\ &- \psi^{(0)}(a) K_{N-a}(bx) - Besselk^{(1,0)}(N-a, bx) \} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\partial h_N(x|a,b)}{\partial b} = C \left\{ \frac{2N}{b} K_{N-a}(bx) + \frac{a-N}{b} K_{N-a}(bx) - \frac{x}{2} (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \right\} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial a \partial a} &= C \{ \log(bx) K_{N-a}(bx) - (\log(2) K_{N-a}(bx)) \\ &- (\psi^{(0)}(a) K_{N-a}(bx)) (-\psi^{(0)}(a) - \log(2) + \log(bx)) \\ &- (Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)) (-\psi^{(0)}(a) - \log(2) + \log(bx)) \\ &- (\log(bx) Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)) \\ &+ (\log(2) Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)) \\ &- (\psi^{(1)}(a) Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)) \\ &+ (\psi^{(0)}(a) Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)) \\ &+ Besselk^{(2,0)}(N-a, bx) \} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial b \partial b} &= C \left\{ \frac{2N}{b} K_{N-a}(bx) + \frac{a-N}{b} K_{N-a}(bx) - \left( \frac{x}{2} (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \left( \frac{2N}{b} \right) \right) \right. \\ &- \left( \frac{x}{2} (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \left( \frac{a-N}{b} \right) \right) \\ &\left. - \left( \frac{2N}{b^2} K_{N-a}(bx) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{N}{b} x (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \\ &- \frac{a-N}{b^2} K_{N-a}(bx) \\ &- \frac{a-N}{2b^2} x (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \\ &+ \left( \frac{1}{4} x (K_{N-a-2}(bx) + 2K_{N-a}(bx) + K_{N-a+2}(bx)) \right) \} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_N(x|a,b)}{\partial a \partial b} &= C \left\{ \frac{2N}{b} \log(bx) K_{N-a}(bx) - \frac{2N}{b} \log(2) K_{N-a}(bx) \right. \\ &+ \left( -\frac{2N}{b} \psi^{(0)}(a) K_{N-a}(bx) - \frac{2N}{b} Besselk^{(1,0)}(N-a, bx) \right) \\ &+ \left( \frac{a-N}{b} \log(bx) K_{N-a}(bx) - \frac{a-N}{b} \log(2) K_{N-a}(bx) \right) \\ &+ \left( -\frac{a-N}{b} \psi^{(0)}(a) K_{N-a}(bx) - \frac{2N}{b} Besselk^{(1,0)}(N-a, bx) \right) \\ &+ \left( \frac{1}{b} K_{N-a}(bx) - \frac{1}{2} \log(bx) x (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) \right) \\ &\left. + \left( \frac{1}{2} \psi^{(0)}(a) x (K_{N-a-1}(bx) + K_{N-a+1}(bx)) - x Besselk^{(1,1)}(N-a, bx) \right) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

식 (28)에서  $Besselk^{(1,0)} = \frac{\partial K_{N-a}(bx)}{\partial x}$ ,  $C = \frac{b^{2N} (bx)^{a-N}}{\Gamma(a) 2^{a-1}}$ 이다.

식 (30)에서  $Besselk^{(2,0)} = \frac{\partial Besselk^{(1,0)}(N-a, bx)}{\partial x}$ 이다.

서진배 [한국과학기술원/석박통합과정]

<https://orcid.org/0000-0003-3612-4382>



2015년 2월: 성균관대학교 전자전기공학부 (공학사)  
2015년 3월 ~ 현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학부 석박통합과정  
[주 관심분야] 레이다 신호처리

전주환 [한국과학기술원/교수]

<https://orcid.org/0000-0001-7326-9252>



1980년 : 서강대학교 전자공학과 (공학사)  
1984년 : 미국 Cornell University 전자공학과 (공학석사)  
1989년 : 미국 Stanford University 전자공학과 (공학박사)  
2007년 ~ 현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학부 교수  
[주 관심분야] 레이다

정 지 현 [한화시스템/전문연구원]

<https://orcid.org/0000-0001-7410-6033>



2004년 2월: 단국대학교 전자공학과 (공학사)

2006년 2월: 고려대학교 전파공학과 (공학석사)

2011년 2월: 고려대학교 전파공학과 (공학박사)

2016년 3월~현재: 한화시스템 레이더·

PGM 연구소 전문연구원  
[주 관심분야] 레이더 시스템 설계, 레이더 신호처리

김 진 욱 [한화시스템/선임연구원]

<https://orcid.org/0000-0002-7162-0974>



2012년 2월: 충남대학교 메카트로닉스공학과 (공학사)

2014년 7월: 충남대학교 기계설계메카트로닉스공학과 (공학석사)

2017년 5월~현재: 한화시스템 레이더·PGM 연구소 전문연구원

[주 관심분야] 레이더 시스템 설계, 레이

더 신호처리